

CLASIFICACIONES PROPUESTAS POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA AL DETERMINAR FAMILIAS DE POLIEDROS.

Cruz, María Florencia; Mantica, Ana María; Götte, Marcela

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.

ma.florenciacruz@gmail.com, ana.mantica@gmail.com, marcelagotte@gmail.com

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación que pretende estudiar qué tipo de clasificaciones utilizan estudiantes de Profesorado de Matemática para formar familias de figuras poliédricas. Teniendo en cuenta el análisis previo y los aportes de De Villiers (1994) y Guillén (1991, 2005), se definen tres tipos de clasificaciones: particionales, inclusivas y solapadas. Presentamos el trabajo realizado por tres de los once estudiantes que participan de la propuesta y las respuestas correspondientes al grupo formado por ellos. Se sintetizan las respuestas obtenidas de los cuatro grupos. En todos los casos se determinan los tipos de clasificaciones realizadas por los estudiantes. Se establecen relaciones entre las clasificaciones obtenidas en el análisis previo y lo sucedido en la implementación de la propuesta. Se concluye que los estudiantes no emplean clasificaciones inclusivas y para obtener particionales agregan adjetivos a las solapadas.

Palabras clave: Clasificación, Familias de poliedros, Futuros profesores.

Abstract

This study is part of a research whose objective is to study which kind of classifications math's professorate students use in order to form polyhedral families in a ten polyhedron universe. From the previous analysis and De Villiers (1994) and Guillén (1991, 2005) contributions, we defined three kinds of classification: partitional, inclusive and overlapped. In the present study we show three of eleven student's work, who participated with the proposal and the corresponding answers for their formed group. We resume the obtained answers from all the four groups and, in all the cases, we determinate the kinds of classification made by the students and we establish relationship between the previous analysis and what happened in the proposal implementation. Our conclusion is that students do not use the inclusive classifications, and they include adjectives in overlapped classifications in order to generate partitional classifications.

Key words: Classification - Polyhedral family- Future professors

1. Introducción

La propuesta de investigación que presentamos se lleva a cabo con alumnos de tercer año del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral. Los estudiantes han cursado y aprobado Geometría Euclídea Plana (GEP) y al momento de implementar la propuesta cursan Geometría Euclídea Espacial (GEE) en el que realizan procesos deductivos propios de la geometría.

En este estudio se pretende analizar el tipo de clasificaciones que utilizan los estudiantes del Profesorado de Matemática al trabajar con poliedros, considerando que han

trabajado a lo largo de su escolaridad con clasificaciones particionales y jerárquicas y por tanto conocen las limitaciones y ventajas de cada una.

2. Marco de referencia.

La actividad de clasificar es una de las características esenciales de cualquier rama del pensamiento humano y, en particular, una actividad fundamental en las matemáticas.

Guillén (1991, 2005) sostiene que para determinar tipos de clasificaciones hay que tener en cuenta el criterio utilizado para dividir en clases el universo. Considera clasificaciones particionales en las cuales las subfamilias establecidas deben ser disjuntas y deben de dar cuenta de la totalidad del universo objeto clasificación. Las particionales pueden ser disjuntas, en las que sus clases no tienen elementos en común, o solapadas, en este caso las clases comparten elementos. A las solapadas no la considera una clasificación finalizada, se debe transformar en disjuntas agregando uno o varios adjetivos hasta lograr que no compartan elementos. Llama dicotómicas a las particionales que se determinan considerando por un lado los objetos que cumplen una propiedad y por otro los que no la cumplen. La clasificación jerárquica indica la clasificación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos de los más generales. Las más naturales son aquellas en las que las clases resultantes tienen el nombre genérico y uno o varios adjetivos. Respecto de estas clasificaciones queremos subrayar que las familias establecidas pueden tener varios nombres: correspondientes a los de todas las familias que las contienen, por ejemplo prisma recto de base cóncava (Guillén, 1991, 2005). De Villiers (1994) considera que en la clasificación jerárquica se hace referencia a la clasificación de un conjunto de conceptos de tal manera que los más particulares forman subconjuntos de los más generales, y que en la clasificación por partición los distintos subconjuntos de conceptos diferentes son considerados disjuntos unos de otros. La investigación realizada por De Villiers (1994) muestra que muchos alumnos, incluso después de comparaciones en tablas y otras actividades, si se les da la oportunidad, prefieren definir por particiones. Pueden llegar a entender que hay ciertas ventajas en aceptar una clasificación jerárquica comparando los aspectos positivos y negativos de esas dos maneras de clasificar y definir, que son ambas matemáticamente correctas. En general, según este autor, las definiciones particionales son más largas, tienden a incluir propiedades adicionales para asegurar la exclusión de casos especiales, mientras que las jerárquicas aseguran que todos los teoremas demostrados para un concepto se aplican a sus casos especiales. En matemática, en general, se utilizan clasificaciones jerárquicas por las ventajas que ofrecen, conducen a definiciones más económicas y simplifican la sistematización deductiva y la derivación de las propiedades de conceptos especiales. No obstante las clasificaciones y sus correspondientes definiciones son arbitrarias y no absolutas y considerar entre jerárquicas y particionales es una opción personal o de conveniencia.

3. Metodología y diseño de tareas.

Diseñamos e implementamos un cuestionario de preguntas abiertas, registramos la información obtenida a través de artefactos escritos y de grabaciones en audio. La presente investigación está situada en el paradigma interpretativo. (Cohen y Manion, 1990).

El cuestionario se administra a once estudiantes que cursan la cátedra GEE y que han cursado y aprobado GEP. Los conceptos que se expresan a continuación son los desarrollados hasta el momento de implementar la propuesta: ángulos diedros, ángulos poliedros, poliedros cóncavos y convexos, poliedros regulares convexos, relación de

Euler, paralelismo y perpendicularidad entre rectas, paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano, paralelismo y perpendicularidad entre planos y transformaciones en el espacio. Para el tratamiento de estos temas los estudiantes cuentan con apuntes de cátedra y el texto de Geometría Métrica de Puig Adam (1980). Durante la implementación del cuestionario los alumnos pueden recurrir al material bibliográfico utilizado en las cátedras mencionadas. Se entregan a los estudiantes un conjunto de diez modelos de poliedros para la formación de familias, la mitad de los estudiantes reciben ocho poliedros en representaciones tridimensionales planas y la otra mitad ocho poliedros en materiales manipulativos contruidos con Polydron⁵⁵, a todos se les entregan dos de los poliedros representados en software dado que Polydron no permite realizar estos poliedros que nos interesa que formen parte del universo (pirámide y prisma oblicuos). El cuestionario que se presenta a los estudiantes está constituido por las siguientes tareas:

Primera tarea: Dividir los diez poliedros dados, utilizándolos a todos, en no menos de tres familias que contengan cada una al menos a dos de ellos.

Segunda tarea: Dividir los diez poliedros dados, utilizándolos a todos, en no menos de tres familias que contengan cada una al menos a dos de ellos y que cada poliedro pertenezca a una y solo una familia. La propuesta se implementa en tres momentos, el primero, de reflexión individual para responder la primer tarea, el segundo donde los estudiantes se reúnen en grupos de dos o tres integrantes, para compartir lo realizado en forma individual y elaborar una respuesta única de la primer tarea. En el tercero se entrega la segunda tarea esperando sólo respuestas grupales de la misma. Entregamos las tareas que constituyen el cuestionario en dos instancias para que la segunda no direcciona posibles respuestas en la primera. Presentamos los modelos de poliedros que se entregan a los estudiantes

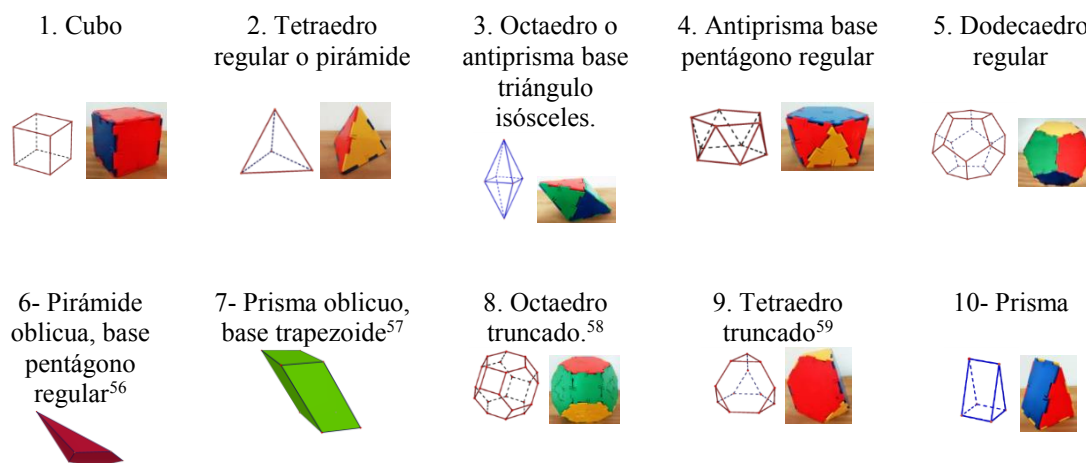


Figura 1: Modelos de los poliedros.

La descripción de los poliedros puede encontrarse en Cruz, et al. (2015).

⁵⁵ Polydron consiste en un conjunto de polígonos realizado en plástico que poseen bisagras para unirse y formar poliedros. Los tipos de polígonos que lo forman son: triángulos equiláteros (dos tamaños), triángulos isósceles acutángulos, triángulos isósceles rectángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos regulares, hexágonos regulares, octógonos regulares.

⁵⁶ Poliedro construido con Cabri 3D

⁵⁷ Poliedro construido con Cabri 3D

⁵⁸ Denominación tomada de Guillén (1991)

⁵⁹ Denominación tomada de Guillén (1991)

Destacamos que no se entregan los nombres que identifican los poliedros a los estudiantes, se los presenta de este modo para utilizar un lenguaje específico en el presente trabajo. En la implementación de la propuesta se identifican con números.

4. Análisis previo

El análisis previo no pretende ser exhaustivo, realizamos algunas de las familias que se esperan obtener en la implementación de la tarea, que nos permiten determinar categorías de análisis. Las clasificaciones se determinan teniendo en cuenta diferentes criterios: el número de caras que tiene el poliedro; algunas familias conocidas⁶⁰, antiprismas y el resto; la regularidad de las caras, de los ángulos poliedros y de la congruencia entre las caras; la utilización de familias conocidas y el resto; el número de lados de las caras que tiene el poliedro; la utilización de familias conocidas, antiprismas y semirregulares; la regularidad de las caras que forman el poliedro; el número de pares de planos paralelos que contienen a las caras que forman al poliedro; el tipo de ángulos poliedros que tienen; la regularidad de las caras que forman el poliedro y la igualdad de las caras.

El análisis previo más detallado puede encontrarse en Cruz, et al. (2015). Teniendo en cuenta que las clasificaciones obtenidas en el análisis previo no responden en forma estricta a las mencionadas por Guillén (1991, 2005) o por De Villiers (1994), autores considerados en el marco de referencia, planteamos una clasificación que permite realizar el análisis del trabajo elaborado por los estudiantes del Profesorado de Matemática.

A continuación expresamos la denominación y la caracterización que daremos a las clasificaciones según las relaciones entre las familias que quedan determinadas:

Clasificaciones particionales: las familias que los forman no tienen poliedros en común.

Clasificaciones inclusivas: existe una relación de inclusión entre todas las familias determinadas. Cada familia excepto el universo está incluida en otra.

Clasificaciones solapadas: son las no inclusivas ni particionales.

5. Análisis de lo realizado por los estudiantes

En el momento de la implementación de la tarea se encuentran presentes once estudiantes, para el análisis que presentamos consideramos tres de ellos que constituyen un grupo, reciben los modelos de poliedros en Polydron. Consideramos el grupo que denominamos **G-3**, constituido por los estudiantes **C, R y P**.

Respuesta individual de la tarea uno:

Estudiante C⁶¹

El alumno expresa que los poliedros regulares *tienen las caras todos polígonos regulares iguales y en el vértice concurren la misma cantidad de caras*, si bien respeta el acuerdo convenido en la cátedra GEE, reconoce al 3 (octaedro no regular) como regular, no tiene en cuenta que sus caras no son polígonos regulares. En la familia 2 considera como poliedros con caras alternadas a los que tienen *una cantidad de caras iguales unidas por una desigual*, omitiendo el poliedro 4. En la familia 3, *poliedros con doce aristas*, excluye el poliedro 7 que cumple la condición. Suponemos que en las familias 4 y 5 el estudiante considera que tengan 6 caras y 6 vértices respectivamente por los poliedros que incluye en cada una de ellas, en su cuestionario expresa *misma*

⁶⁰ Consideramos familias conocidas a: pirámides, prismas y poliedros regulares.

⁶¹ De aquí en adelante, se escriben en cursiva las respuestas textuales de los alumnos.

cantidad de caras y misma cantidad de vértices. En la familia 6 la característica que el estudiante determina es *caras distintas*, pareciera que considera poliedros con caras regulares, dado que incluye aquí los poliedros 9, 8 y 4.

Considera familias que comparten elementos, por tanto la clasificación es del tipo solapada.

Estudiante R

En la familia 1 selecciona poliedros regulares como los que *en cada vértice concurren el mismo número de caras*, del mismo modo que el alumno C. En la familia 2 considera los *poliedros que tienen seis caras*. En la familia 3, elige *poliedros que tienen seis vértices*, prescinde del poliedro 6 que forma parte de la misma. En la familia 4 considera aquellos que sus caras son polígonos regulares, no iguales.

Determina familias con elementos en común, es decir la clasificación es del tipo solapada.

Estudiante P

El trabajo planteado por P es idéntico al realizado por R.

Trabajo grupal G-3:

Tarea 1:

<ul style="list-style-type: none"> Poliedros regulares 1- 2- 5 	<ul style="list-style-type: none"> Misma cantidad de vértices (6) 3- 10- 	<ul style="list-style-type: none"> Poliedros con caras distintas 4- 8- 9
<ul style="list-style-type: none"> Misma cantidad de caras(6) , 		

Tabla 1: Clasificación propuesta por G-3 tarea 1.

Teniendo en cuenta la transcripción del audio afirmamos que para los estudiantes de este grupo el poliedro 3 es regular, no obstante cuando presentan la tarea dos por escrito lo colocan sólo en la familia 3, sin realizar justificación alguna, suponemos que este cambio es debido a las interacciones realizadas en la puesta que se hace en común con la totalidad de estudiantes presentes en la implementación de tarea. En la familia “poliedros con caras distintas” los estudiantes consideran poliedros con caras regulares no iguales entre si, por esta razón creemos que omitieron el adjetivo “regulares” y en la familia “misma cantidad de vértices (6)” excluyen el poliedro 6 tal como lo realizan en el momento individual cada uno de los participantes. La clasificación propuesta es de tipo solapada.

Tarea 2:

<ul style="list-style-type: none"> Tiene caras que son triángulos regulares 2- 4- 9 	<ul style="list-style-type: none"> Algunas de sus caras son triángulos irregulares y ninguna es un cuadrado 3- 6- 10-
<ul style="list-style-type: none"> Alguna de sus caras son cuadrados 1- 8- 	<ul style="list-style-type: none"> No tiene caras que sean triángulos ni cuadrados 5- 7-

Tabla 2: Clasificación propuesta por G-3 tarea 2.

Para esta actividad deciden formar familias observando el número de caras. No tienen en cuenta aristas y vértices, características consideradas en el trabajo individual porque afirman en el audio que “*algún poliedro se puede repetir*”. Logran responder a la tarea solicitada correctamente obteniendo una clasificación del tipo particional.

6. Resultados generales

Se presenta una síntesis del trabajo realizado por los cuatro grupos tanto en la tarea 1 (T1) como en la tarea 2 (T2). El análisis detallado puede encontrarse en Cruz et al. (2015).

Grupo	Tipo de clasificación	Criterios utilizados
Grupo1 (D,J,S,)	T1: Particional.	Caras que conforman el poliedro: *regulares e iguales *regulares distintas *no regulares
	T2: Particional	Caras que conforman el poliedro: *tiene triángulos equiláteros *tiene cuadraros *tiene triángulos no equiláteros y no tiene cuadrados *no tiene triángulos ni cuadrados
Grupo2 (A,Y,B)	T1: Solapada	Caras que conforman el poliedro: *tiene triángulos *tiene cuadriláteros *tiene pentágonos
	T2: Particional	Caras que conforman el poliedro: *todas son triángulos *seis son cuadriláteros *tiene pentágonos Caras que conforman el poliedro y aristas que concurren en un vértice: *tiene triángulos y 3 aristas por vértice.
Grupo3 (C,R,P)	T1: Solapada	Caras que conforman el poliedro: *regularidad *forma. Igualdad del número de: *seis caras *seis vértices.
	T2: Particional	Caras que conforman el poliedro: * tiene triángulos equiláteros * tiene triángulos no equiláteros y no tiene cuadrados *tiene cuadrados * No tiene triángulos ni cuadrados.
Grupo4 (M,V)	T1: Solapada	Caras que conforman el poliedro: *regularidad Igualdad del número de aristas que concurren por vértice: *tres *cuatro Poliedros oblicuo.
	T2: Particional	Caras que conforman el poliedro: *regularidad Poliedros oblicuo. Igualdad del número de aristas que concurren por vértice: *cuatro Caras que conforman el poliedro y aristas que concurren en un vértice: *tres aristas y 2 polígonos regulares distintos.

Tabla 3: Síntesis de clasificaciones propuestas.

7. Conclusiones

Al determinar los tipos de clasificaciones que elaboran los estudiantes, al responder el cuestionario, apreciamos que sólo un grupo utiliza en la primera tarea clasificaciones particionales. Al realizar el análisis previo se incluye la categoría de clasificaciones solapadas, que son utilizadas por los otros tres grupos.

Consideramos que los estudiantes realizan una mirada parcializada sobre las figuras para determinar las familias de poliedros, poniendo su atención especialmente en, por ejemplo, las formas de caras del poliedro, si los polígonos que lo conforman son regulares iguales o no, si son oblicuos, en general, no realizan una mirada global de los poliedros para determinar las familias. En el análisis previo al determinar las familias se realiza una mirada relacionando los elementos que forman el poliedro, dado que se espera que los estudiantes tengan en cuenta características para determinar las familias como: relación entre los planos que contienen las caras, ángulos poliedros, semirregulares, antiprismas, o bien familias conocidas como prismas, pirámides, poliedros regulares. Los estudiantes conocen los poliedros regulares y es una familia que determinan la mayoría de los grupos, sin embargo no todos pueden determinar que el poliedro 3 no cumple todas las características que se exige a un poliedro para que sea regular. Los alumnos en GEE trabajan el concepto de prisma y pirámide y sin embargo no utilizan estos conceptos para determinar una familia. Es notorio también que han

trabajado las relaciones entre planos paralelos y no es una característica considerada para determinar una familia.

Observamos que si bien conocen y utilizan, en las cátedras GEP y GEE, las ventajas de las clasificaciones inclusivas, no determinan este tipo de clasificaciones, como se expone en la tabla 3. Destacamos que con en el universo de poliedros que se presenta no es simple determinar clasificaciones inclusivas, no obstante se espera que al ser los estudiantes de tercer año de Profesorado de Matemática intenten obtener este tipo de clasificaciones. De Villiers (1994) sostiene que muchos alumnos si se les da la oportunidad, prefieren definir por partición, sin embargo en este caso sólo un grupo utiliza este tipo de clasificaciones para responder a la primera tarea.

En la segunda todos los grupos realizan clasificaciones particionales dado que la consigna lo solicita. Para lograr obtener clasificaciones particionales agregan adjetivos a familias que de no tenerlos serían solapadas o bien incompletas Guillén (1991, 2005).

Para una mayor seguridad sobre estas afirmaciones realizamos entrevistas a estos alumnos esperando tener argumentos para comprender por qué toman las clasificaciones expuestas.

8. Bibliografía

Cruz, M.; Mántica, A. y Götte, M. (2015). Clasificaciones de poliedros en estudiantes del profesorado de matemática. Análisis de una experiencia. En *Actas de IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales*. Disponible en <http://jornadasceyn.fahce.unlp.edu.ar/convocatoria/actas-2015/trabajos-matematica/Cruz.pdf/view>.

De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics* 14(1), 11-18.

Disponible en: <http://flm-journal.org/Articles/58360C6934555B2AC78983AE5FE21.pdf>

Guillén Soler, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Síntesis.

Guillén Soler, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática*, 17 (2), 117-152.

Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I. Fundamentos. Euler, G. Madrid: Puig Ediciones.